Erscheint in: Halverscheid, S., et al. (Hrsg.), Band zur Tagung
Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung, Göttingen, 2017.

Enkulturation durch fachmathematische Lehrveranstaltungen im gymnasialen Lehramtsstudium – Hürden und Ansätze

Thomas Bauer

Zusammenfassung Enkulturation in das Fach Mathematik ist ein wichtiges Ziel des Mathematikstudiums. Viele Lehrende machen die Beobachtung, dass Lehramtsstudierende am Ende ihres Studiums weniger stark enkulturiert zu sein scheinen als Masterstudierende. Der vorliegende Beitrag zeigt mögliche Gründe hierfür auf und stellt einen Ansatz vor, der dem Problem durch *Aufgaben mit Forschungselementen* begegnet. Er werden Beispiele für solche Aufgaben und erläutert konzeptionelle Grundlagen zu deren Design erläutert.

1 Einleitung

Die fachmathematische Lehramtsausbildung verfolgt sowohl Ziele, die sich auf mathematische Inhalte beziehen, als auch Ziele, die mathematische Denk- und Arbeitsweisen betreffen. Die Auswahl und Vermittlung der Inhalte folgt dem Leitgedanken, Wissen aufzubauen, mit dem angehende Lehrkräfte den fachlichen Herausforderungen ihres künftigen Berufslebens gewachsen sind. Dazu gehören vor allem die Planung und Durchführung von Unterricht sowie die Diagnose von Schüleräußerungen. Eine der Herausforderungen für die Lehramtsausbildung besteht darin, zu erreichen, dass Studierende die fachlichen Ausbildungsanteile in dieser Hinsicht als relevant anerkennen. Hierfür wurden in den letzten Jahren verschiedene Ansätze entwickelt und umgesetzt (z.B. Beutelspacher et al. 2011, Bauer 2013).

Das vorliegende Kapitel konzentriert sich auf die Ebene der Denk- und Arbeitsweisen. Hier geht es um Ausbildungsziele, in denen neben den bereichsspezifischen

Thomas Bauer
Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein-Straße, 35032 Marburg, e-mail: tbauer@mathematik.uni-marburg.de

Inhalten (in Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik, ...) auch bereichsübergreifende mathematikspezifische Denkweisen, Fähigkeiten und Haltungen zum Mathematiktreiben ins Auge gefasst werden – es geht um das Eintreten in die mathematische Gemeinschaft im Sinne einer *Enkulturation* (Abschn. 2). Damit verbindet sich nicht die Forderung nach Höchstleistungen in mathematischer Forschung, wie sie von einem Wissenschaftler dieser Disziplin erwartet werden, und auch nicht die Vertrautheit mit den hochentwickelten Begriffen und Werkzeugen, die in aktueller Forschung zum Einsatz kommen. Gemeint sind aber ein Eindringen in professionstypische Denk- und Arbeitsweisen sowie das Herausbilden von zugehörigen Werthaltungen.

Beim Bestreben, Enkulturation zu fördern, sind im Lehramtsstudium durchaus Hürden zu überwinden. Nicht alle Lehramtsstudierenden der Mathematik haben ihren Interessensschwerpunkt in den fachlichen Inhalten der Mathematik. Ferner ist im Vergleich zu reinen Fachstudiengängen das für fachliche Inhalte verfügbare Studienvolumen meist knapp bemessen (Abschn. 4). Bei der Gestaltung des Lehramtsstudiums liegt daher eine große Herausforderung darin, den Studierenden trotz dieser Ausgangslage möglichst viel Gelegenheit zur Enkulturation zu geben. Wir stellen in diesem Kapitel einen Ansatz vor, wie dies im Rahmen von Übungsaufgaben versucht werden kann. Maßnahmen im Rahmen von Übungsaufgaben haben den Vorzug, dass sie niederschwellig sind, da sie innerhalb des Rahmens der vorhandenen Ausbildungsstruktur durchgeführt werden können.

2 Theoretischer Hintergrund

2.1 Enkulturation

Der Begriff *Enkulturation* wird in verschiedenen Disziplinen mit teils verschiedenen Bedeutungen verwendet. Der vorliegenden Untersuchung legen wir eine mathematikdidaktische Perspektive zugrunde, wie sie Alan H. Schoenfeld (1992) formuliert hat. Er bezieht sich auf Lauren B. Resnick (1989), die von *Sozialisation* spricht und damit unter Bezugnahme auf die Verwendung des Begriffs in der Psychologie „the long-term process by which personal habits and traits are shaped through participation in social interactions with particular demand and reward characteristics“ meint. Schoenfeld führt diesen Gedanken weiter und verwendet dafür den Begriff *Enkulturation*. Als dessen Wirkung lernt das Individuum, mathematisch zu denken, was Schoenfeld durch zwei Merkmale charakterisiert:

> Learning to think mathematically means (a) developing a mathematical point of view – valuing the processes of mathematization and abstraction and having the predilection to apply them, and (b) developing competence with the tools of the trade, and using those tools in the service of the goal of understanding structure – mathematical sense-making. (Schoenfeld 1992, S. 335)

Mit Bezug auf Resnick stellt er Perspektive und Standpunkt als Kernaspekte mathematischen Denkens heraus, wenn er betont „a fundamental component of thinking mathematically is having a *mathematical point of view* – seeing the world in ways like mathematicians do“ (Schoenfeld 1992, S. 340). Dass die Hochschulausbildung Wirkungen dieser Art hervorbringen sollte, die über den Fachinhalt hinausgehen, wurde bereits von Toeplitz (1932) gefordert:

> Der mathematische Hochschulunterricht entbehrt seines eigentlichen Sinnes, wenn es jenseits der Materien, die er lehrt, nicht noch eine allgemeine *Einstellung*, ein *Niveau* gäbe, das er vermitteln will. Aber was ist dieses *geheimnisvolle „Niveau“*, das wir alle empfinden, ohne es je definiert zu haben? (Toeplitz 1932, S. 2)

Seaman und Szydlik (2007) konzeptualisieren mit dem Konstrukt der *Mathematical Sophistication* (vgl. auch Seaman, Szyklik und Kuennen 2009) die Wirkung von Enkulturation, indem sie eine Liste von Merkmalszügen herausarbeiten, in denen sich vollzogene Enkulturation äußert. Diese lassen sich in drei Kategorien gruppieren:

- *Was Mathematiker zu erreichen suchen:* Sie versuchen, Regelmäßigkeiten und Beziehungen zwischen mathematischen Objekten zu verstehen und Analogien zwischen Sätzen, Beweisen, Theorien zu finden.
- *Wie sie mit mathematischen Objekten umgehen:* Sie schaffen mentale Modelle, symbolische Darstellungen, sowie Beispiele und Gegenbeispiele für sie. Sie stellen Vermutungen über sie auf und testen diese.
- *Wie sie sich Gewissheit verschaffen:* Sie schätzen präzise Sprache und die feinen Unterscheidungen, die sie ermöglicht. Sie nutzen präzise Definitionen, um Bedeutung zu schaffen, und verwenden logische Argumente und Gegenbeispiele, um zu überzeugen.

Auch aus dieser Zusammenstellung wird deutlich, dass sich Enkulturation in dieser Auffassung sowohl in bestimmten Denk- und Arbeitsweisen als auch in Werthaltungen äußert, die die in der mathematischen Gemeinschaft ausgeübte Praxis ausmachen. In Bezug auf die Lehramtsausbildung kommen Seaman und Szydlik (2007, S. 179) zu dem Schluss, „developing ‚the habits of mind of a mathematical thinker‘ should be the crucial role that mathematics content courses play in the preparation of teachers“.

Eine Ausdifferenzierung von mathematikspezifischen Arbeitsweisen und Haltungen bietet auch Hefendehl-Hebeker (2015) in der Forderung, dass angehende Lehrkräfte Professionalität im Umgang mit der spezifischen Wissensbildung des Faches Mathematik gewinnen sollen, indem sie das Bewusstsein entwickeln,

> - wie die Mathematik ihre Gegenstände gedanklich in den Griff nimmt,
> - welche Fragen sie angesichts von Beobachtungen stellt,
> - welche Phänomene sie des Nachdenkens wert hält,
> - wie sie ihre Begriffe definiert und warum,
> - wie sie Systeme und Theorien bildet und wozu,
> - wie sie argumentativ Gewissheit erzeugt,
> - welche Darstellungsmittel sie zu diesem Zweck verwendet.

Sie begründet dabei auch, warum Enkulturation bei Lehramtsstudierenden angestrebt werden soll: Lehrkräfte sollten von diesem Wissen „durchdrungen sein und es im elementaren Zusammenhang der Schulmathematik zur Geltung bringen können“ (Hefendehl-Hebeker 2015).

2.2 *Induktives und deduktives Schließen*

Da Beweisen eine zentrale mathematische Aktivität ist, gehört es zur Enkulturation im Fach Mathematik, ein Bewusstsein dafür zu entwickeln, wie Sätze und Beweise entstehen und welche Funktion induktives und deduktives Schließen dabei haben. Beim induktiven Vorgehen werden Konzepte oder Prinzipien aus der Betrachtung von Beispielen abstrahiert oder extrahiert. Bills et al. (2006) zeigen auf, wie im 19. Jahrhundert Pestalozzi, Colburn und Spencer und im 20. Jahrhundert Pólya induktive Vorgehensweisen beim Lehren und Lernen befürwortet haben. Pólya (1969, S. 10) geht so weit zu sagen: „Man muss einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist“. Berendonk (2015) weist darauf hin, dass induktives Schließen allerdings nur *eine* Möglichkeit darstellt, zu einem mathematischen Satz und Beweis zu gelangen. Auch durch *deduktives* Schließen kann man einen mathematischen Sachverhalt entdecken – und ihn gleichzeitig beweisen. Dieses Vorgehen wird von Lakatos (1979) als *deduktives Mutmaßen* bezeichnet. In der von De Villiers (1990) entwickelten Systematik der Beweisfunktionen entspricht dies der *entdeckenden Funktion* von Beweisen. Berendonk (2014) führt am Beispiel des Eulerschen Polyedersatzes eine eingehende Studie verschiedenartiger Schlussweisen durch, wobei er für dieses Beispiel neben dem induktiven und deduktiven Schließen auch eine von Euler inspirierte Zugangsweise des „Findens ohne Suchen“ (Serendipitätsprinzip) entwickelt.

Wird beim induktiven Vorgehen eine Phase des Explorierens und Vermutens mit einer anschließenden Beweisphase verknüpft, so bestehen prinzipiell zwei Möglichkeiten: Im einen Fall können die Argumente, die in heuristischen Überlegungen vom Lernenden hervorgebracht werden, in der anschließenden Beweisphase genutzt und (ggf. mit weiteren Überlegungen) zu einem Beweis ausgebaut werden. Boero et al. (1996) und Garuti et al. (1998) sprechen in diesem Fall von *Cognitive Unity* zwischen Vermutung und Beweis. Im anderen Fall führen die Argumente, die in der heuristischen Phase gefunden wurden, zwar dazu, dass der Lernende zu einer überzeugenden Vermutung gelangt ist, die Argumente können aber in der anschließenden Beweisphase nicht zur Rechtfertigung genutzt werden. Pedemonte (2002) spricht in diesem Fall von *Cognitive Break*.

2.3 Forschungsnahes Lehren und Lernen

Das Ziel, professionstypische Arbeitsweisen in auszubilden, findet sich auch in der Forderung wieder, Studierenden Gelegenheiten zum *forschenden Lernen* zu geben. Die Idee des forschenden Lernens, das darauf abzielt, die Studierenden an forschendes Arbeiten heranzuführen und in Forschungsaktivitäten einzubinden, ist besonders im letzten Jahrzehnt vielfach aufgegriffen worden (Huber 2014). Als Merkmal von Forschung gibt Huber (2009) an, dass deren Ergebnis nicht nur eine Lernleistung des Individuums darstellt, sondern „auf die Gewinnung von auch für Dritte interessanten Erkenntnissen gerichtet ist“. Im Unterschied zum entdeckenden Lernen, das primär auf Eigenaktivität des Lernenden und einen subjektiven Erkenntnisgewinn abzielt, geht es beim forschenden Lernen um einen objektiven Erkenntnisgewinn. Huber spricht von forschendem Lernen, wenn die Lernenden an den wesentlichen Phasen eines Forschungsprozesses beteiligt sind. Neben dem Begriff *forschendes Lernen* sind zwei verwandte Begriffe in Gebrauch: *forschungsbasiertes Lernen* und *forschungsorientiertes Lernen*. Huber (2014) fasst die drei Begriffe unter dem Terminus *forschungsnahes Lehren und Lernen* zusammen. Solches ist auch dann in sinnvoller Weise möglich, wenn keine originäre Forschung stattfindet, sondern authentische Forschungs*prozesse* erlebt werden: Huber (2009) unterstützt dies, wenn er betont: „Sichtbarmachen und Thematisieren des Forschungsvorganges (nicht nur der Resultate!) ist wichtig genug und kann bereits in den klassischen akademischen Lehrformen geleistet werden.“

3 Fragestellung und Anliegen

Das Anliegen, professionstypische Arbeitsweisen sichtbar zu machen, wurde in der mathematischen Hochschulausbildung in verschiedener Weise verfolgt: Als Beispiel aus der Lehrbuchliteratur sei das Buch zur Darstellungstheorie von Fulton und Harris (1991) erwähnt, das in der Präsentation gezielt induktive Elemente verwendet. Die Autoren setzen diese bewusst ein, um die Lernenden zu unterstützen: „beginners can best learn about a subject by working through examples“ (Fulton und Harris 1991, S. vi). Ein Beispiel aus der deutschsprachigen Lehrbuchliteratur stellt das Lehrbuch von Heuser (1986) zur Analysis dar: So lässt sich etwa Abschnitt 79 dieses Buches als Beispiel für deduktives Mutmaßen auffassen, bei dem nicht nur der Erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung entdeckt und gleichzeitig bewiesen, sondern im gleichen Zuge auch die Definition des Riemann-Integrals ausgeformt wird. Im Bereich der Entwicklung von Aufgaben gibt es eine Reihe von Ansätzen: Halverscheid und Müller (2013) fördern die Entwicklung mathematischer Grundvorstellungen mit *experimentellen Aufgaben*. Winsløw (2017) stellt Aufgaben vor (*F-exercises*), die einen stärkeren Bezug zu den Anforderungen in mündlichen Prüfungen haben. Bikner-Ahsbahs und Schäfer (2013) entwickeln ein Aufgabenkonzept (FABEL), in dem insbesondere explorierende Aufgaben berücksichtigt werden, um heuristisches Arbeiten zu schulen. Hoffkamp et al. (2016) stellen Lernszenarien für den Übergang Schule–Hochschule vor, die Argumentation, Beweis und Rechtfertigung thematisieren.

Auch der vorliegende Text betrachtet den Bereich der Aufgaben und nimmt dabei die Tätigkeiten des Vermutens und Beweisens in den Blick. Der Fokus liegt hier auf Aufgaben, die in vorlesungsbegleitenden Übungen eingesetzt werden – die Fragestellung lässt sich wie folgt formulieren:

- Wie können Beweisaufgaben, die traditionell vorlesungsbegleitend als Hausübungen eingesetzt werden, so umgearbeitet werden, dass sie zu professionstypischen Arbeitsweisen anregen und dadurch einen Enkulturationseffekt erwarten lassen?
- Welche Arten von Steuerung lassen sich unterscheiden und in Aufgaben realisieren?

Wir spezifizieren, welche Anforderungen im Rahmen dieses Kapitels an eine solche Umarbeitung von Aufgaben gestellt werden sollen. Dadurch wird auch verdeutlicht, worin das Spezifikum des vorliegenden Kapitels im Vergleich zu den o.g. Ansätzen besteht:

1. Die umgearbeiteten Aufgaben sollen im Regelbetrieb als Ersatz für ihre klassischen Pendants eingesetzt werden können, ohne inhaltliche oder organisatorische Änderungen nach sich zu ziehen, die über die Aufgabe hinausgehen. (Hiermit soll ein niederschwelliger Einsatz ermöglicht werden.)
2. Sie sollen die Aufgaben um explizite Aufforderungen zu induktivem Schließen und deduktivem Mutmaßen erweitern – insbesondere dort, wo dies von klassischen Aufgaben implizit als Teil des Lösungsprozesses erwartet, dort aber nicht explizit angeleitet wird.
3. Die Aufgaben sollen – als Konsequenz aus Punkt 1 – nicht nur eine explorative Phase enthalten, sondern auch den deduktiven Anteil ihrer klassischen Pendants. (Insbesondere wird genau derselbe Satz bewiesen.)

4 Ausgangslage: Enkulturationshürden und Enkulturationsgelegenheiten

Man darf davon ausgehen, dass der Grad der Enkulturation, der am Ende eines Studiums erreicht ist, von einer Reihe von Faktoren abhängt, die einerseits im Individuum liegen und sich andererseits auch zum Studiengang (Bachelor/Master oder Lehramt) in Bezug setzen lassen. Drei studiengangsbezogene Faktoren sollen in Abschnitt 4.1 bis 4.3 diskutiert werden. In Abschnitt 4.4 diskutieren wir Äußerungen und Arbeitsprodukte von Studierenden unter dem Aspekt von Enkulturation.

4.1 Ausgangslage: Verfügbares Studienvolumen

Das Volumen des fachmathematischen Anteils an der gymnasialen Lehramtsausbildung ist im Laufe der Jahre geringer geworden, um anderen Ausbildungsanteilen Raum zu geben. Als Beispiel sei hier die Situation am Standort des Verfassers beschrieben: In Hessen ist der gymnasiale Lehramtsstudiengang auf acht Semester ausgelegt. Von den 240 Leistungspunkten, die damit zur Verfügung stehen, entfallen 60, also nur ein Viertel, auf den fachmathematischen Anteil. (Weitere 60 Leistungspunkte entfallen auf den fachlichen Anteil eines zweiten Unterrichtsfaches, je 30 Leistungspunkte auf die Didaktiken der beiden Fächer und 60 Leistungspunkte auf den erziehungswissenschaftlichen Studienanteil.) Der zehnsemestrige Bachelor-Masterstudiengang Mathematik hat 300 Leistungspunkte, von denen 243 Leistungspunkte auf fachmathematische Veranstaltungen entfallen. Der Unterschied im fach-

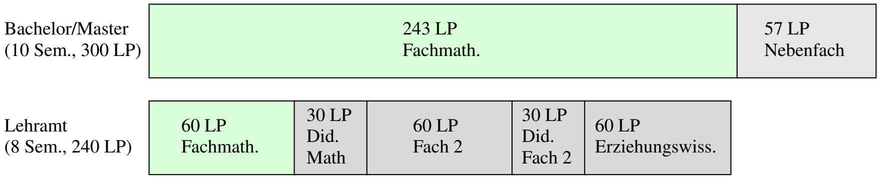

Abbildung 1 Fachmathematische Ausbildungsanteile (grüne Balken) im Bachelor-Masterstudiengang und im Lehramtsstudiengang am Standort des Verfassers

lichen Ausbildungsanteil ist somit erheblich (siehe Abb. 1). Man kann vermuten, dass das Ausbildungsvolumen einen Einfluss auf den Grad der erreichten Enkulturation haben wird, denn bei einem circa viermal so hohen Volumen an fachlicher Ausbildung besteht weitaus mehr Gelegenheit, in eine Fachkultur einzudringen und deren spezifische Denk- und Arbeitsweisen kennen zu lernen und zu verinnerlichen.

4.2 Ausgangslage: Fachbezogene Studienmotivation

Neben dem Ausbildungsumfang dürfte auch der Grad des Interesses an Enkulturation ein wesentlicher Einflussfaktor sein. Der Verfasser hat zwei Befragungen bei Lehramtsstudierenden in der Vorlesung Analysis durchgeführt, in denen die Studierenden gefragt wurden, ob sie Mathematik als Haupt- oder als Nebenfach gewählt hätten, wenn die zwei Unterrichtsfächer in unterschiedlicher Gewichtung zu studieren wären. Befragung 1 fand im Sommersemester 2006 mit $N = 36$ Lehramtsstudierenden statt, Befragung 2 im Wintersemester 2010 mit $N = 41$ Lehramtsstudierenden. Der Anteil der Lehramtsstudierenden, die Mathematik als Nebenfach gewählt hätten, ist in den zwei Befragungen zwar durchaus unterschiedlich (Abb. 2), in beiden Fällen aber erheblich. Dies muss nicht überraschen, wenn man unterstellt, dass

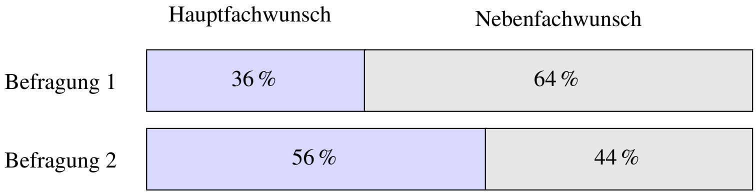

Abbildung 2 Ergebnisse zweier Befragungen bei Lehramtsstudierenden ($N = 36$ bzw. $N = 41$) zur Frage: „Wenn Ihre zwei Unterrichtsfächer als Haupt- und Nebenfach zu studieren wären, hätten Sie dann Mathematik als Hauptfach oder als Nebenfach gewählt?“

sehr oft eine Präferenz für eines der gewählten Unterrichtsfächer vorliegt. Ferner ist der Befund kompatibel mit einem Ergebnis von Halverscheid et al. (2014), die in ihrer Erhebung feststellten, dass bei Lehramtsstudierenden das fachliche Interesse als Grund für die Wahl des Studiengangs weit weniger angegeben wurde als bei BSc-Studierenden.

Solche Befunde unterstützen Beobachtungen von Lehrenden, dass die fachbezogene Studienmotivation bei einem Teil der Lehramtsstudierenden ihren Schwerpunkt nicht in der Mathematik hat. Der Interessensschwerpunkt wiederum kann einen Einfluss darauf haben, wie ausgeprägt der Wunsch nach Enkulturation ist. Bei Vollfachstudierenden darf man dagegen davon ausgehen, dass ihre Studienmotivation primär im Fach Mathematik liegt und sie daher ein höheres Interesse daran haben, sich professionstypische Arbeits-, Denk- und Verhaltensweisen zu eigen zu machen. Als Folge hiervon beobachten sie diese daher bewusster an Vorbildern und üben sie aktiv ein, ganz im Sinne einer gewollten Sozialisation als Mathematiker. Mischau und Blunck (2006) stellten empirisch fest:

> [...] dass sich das Interesse der Studierenden des Diplomstudiengangs Mathematik an ihrem Fach am stärksten auf jene Elemente gründet, durch die die Mathematik als „reine Wissenschaft“ charakterisiert wird (Mischau und Blunck 2006, S. 51)

Hauptfachstudierende haben offenbar ein starkes Interesse an den fachlichen Gegenständen, das auch unabhängig von deren möglicher Verwendung in der späteren Berufstätigkeit besteht.

4.3 Ausgangslage: Enkulturationsgelegenheiten

Prinzipiell kann die gesamte Fachausbildung als Gelegenheit zur fachlichen Enkulturation betrachtet werden. Man wird aber erst von denjenigen Situationen eine stark enkulturierende Wirkung erwarten können, in denen mathematisches Arbeiten in der Weise sichtbar wird, wie Mathematiker es tätsächlich ausüben. Erfahrungsgemäß machen Masterstudierende gerade in ihren Abschlussarbeiten in dieser Hinsicht spürbare Fortschritte:

- Im Idealfall stehen Masterarbeiten in engem Zusammenhang mit den aktuellen Forschungsprojekten einer mathematischen Arbeitsgruppe. Die Studierenden nehmen so an einem authentischen Forschungsdiskurs teil und wachsen in eine Forschergruppe hinein. Was sie erarbeiten, wird in der Gruppe tatsächlich benötigt und weiterverwendet. Dies ändert den emotionalen Gehalt bei der Arbeit an Problemen und beim Finden von Lösungen.
- Die Studierenden erleben und praktizieren in der Arbeit an originärer Forschung authentische Arbeitsweisen. Bei einem Beweisproblem durchlaufen sie typische Phasen: mit Beispielen experimentieren, Vermutungen aufstellen und testen, Argumente zu deren Rechtfertigung finden und schließlich zu einem rigorosen Beweis ausarbeiten (im Sinne des Beweisphasenmodells von Boero 1999). Der Betreuer wird hierzu anleiten, die übrigen Mitglieder der Arbeitsgruppe können als weitere Vorbilder dienen.

Im Lehramtstudium bilden authentische Forschungsmomente dieser Art leider eher die Ausnahme. Fachliche Abschlussarbeiten sind vergleichsweise selten, und angesichts des deutlich geringeren Studienvolumens reichen diese kaum an aktuelle Forschung heran. Die Themensteller weichen daher oft auf Aufträge zur Literaturarbeit aus. Diese kann selbstverständlich sehr anspruchsvoll sein, stellt allerdings innerhalb eines Forschungsprozesses, wie Huber (2014) ihn beschreibt, nur einen der ersten Schritte dar. Kuehl (2009, zitiert nach Huber 2009) weist zudem darauf hin, dass Themensteller weniger Interesse an Arbeiten haben, deren Ergebnis schon bekannt ist. Zusammenfassend ergibt sich das Bild, dass Abschlussarbeiten im Lehramtsstudium ihrer Rolle als möglicher Ort, um Mathematik als Forschungsgegenstand zu erleben, die Arbeit von Experten zu beobachten und an echten Forschungsfragen zu arbeiten, nicht immer gerecht werden.

4.4 Äußerungen und Arbeitsprodukte von Studierenden

Um die Ausgangslage möglichst plastisch zu beschreiben, werden nun einige Beispiele aus der Lehrpraxis des Verfassers diskutiert. Diese zeigen Situationen, in denen die Studierenden nicht so sprechen oder handeln, wie es Mathematiker in derselben Situation tun würden.

Beispiel: Beliefs zu „Was ist ein Beweis?" In einem Seminar zum mathematischen Problemlösen (Bauer, Müller-Hill und Weber, WS 2016/17) gelangt eine Teilnehmergruppe bei ihrer Problemlöseaufgabe – deren Inhalt hier der Kürze halber nicht näher beschrieben wird – zu der (richtigen) Vermutung: „Die Anzahl der gefärbten Quadrate ist gleich $n+m+\mathrm{ggT}(m,n)$." Ein Beweis hierfür kann nur mit *inhaltlichen* Überlegungen (überwiegend verbal) gelingen, die auf die Bedeutung von n und m in der Problemsituation Bezug nehmen. Die Gruppe zieht aber bei der Beweisfindung ausschließlich *formelbasierte* Argumente in Betracht. Darauf angesprochen entgegnen die Studierenden: „Sonst ist es doch kein Beweis." Dies kann ein Indiz für einen Mangel an Enkulturation sein, denn die Studierenden zeigen eine

Einstellung zum Beweisen, die von der mathematischen Gemeinschaft nicht geteilt wird: Für Mathematiker ist der Einsatz von Formeln eine Frage der Praktikabilität und Effizienz, aber kein Maßstab für die Gültigkeit eines Beweises.

Beispiel: Stilistische Feinheiten – oder Anzeichen fehlender Enkulturation? Die folgenden Beispiele aus Seminarvorträgen und Arbeitsprodukten von Studierenden stellen bezüglich ihrer Interpretation ein interessantes Problem dar: Was sagen diese Äußerungen über die Enkulturation ihrer Autoren aus? Handelt es sich um stilistische Feinheiten, oder liegt hier eine signifikante Distanz von der in der mathematischen Gemeinschaft ausgeübten Praxis vor?

- „Es gilt $A = 9\,\mathrm{cm}^2 \Rightarrow$ fertig."
  Ist hier eine passgenaue Verwendung mathematischer Symbole einzufordern?
- „Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ strebt gegen 0."
  Ist das unpassende Wort „strebt" statt „ist" hier ein harmloses Versehen, oder deutet es auf ein Problem in Bezug auf die Ontologie mathematischer Begriffe hin?
- „Der Sinussatz ist definiert als $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2F} = 2r$."
  Wird „Definieren" hier in einem alltagssprachlichen Sinne von „es genauer sagen" verwendet?
- „Eine Zahl heißt durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist."
  Handelt es sich um einen Versprecher, oder ist dem Studierenden unklar, welche Funktion das Definieren in der Mathematik hat und welche Anforderungen daher an Definitionen zu stellen sind?

Im Rahmen von Prüfungen würden solche Formulierungen in der Regel kaum beanstandet werden – die Kommunikation erfolgt in Richtung wissender Adressaten, die die Formulierungen zugunsten der Studierenden oft als stilistische Feinheiten oder unbedeutende Versehen übergehen werden. Werden dieselben Formulierungen allerdings von Lehrkräften verwendet, dann können diese für das Lernen ihrer Schüler durchaus hinderlich sein.

5 Umarbeiten von traditionellen Beweisaufgaben zu Aufgaben mit Forschungselementen

5.1 Grundidee und Charakteristika

Das vorzustellende Konzept wird im Folgenden als *Aufgaben mit Forschungselementen* bezeichnet. Wir konkretisieren die Grundidee zunächst anhand eines Beispiels und diskutieren im Anschluss daran die Charakteristika des Ansatzes. Danach werden Aspekte des Designs solcher Aufgaben erörtert.

Beispiel: Exponent einer endlichen Gruppe Abbildung 3 zeigt an einem Beispiel aus einem Modul *Algebra*, wie eine klassische *Nachweisaufgabe* zu einer *Aufgabe mit Forschungselementen* umgearbeitet werden kann. Die Nachweisaufgabe definiert den Begriff *Exponent einer Gruppe* und fordert daraufhin zum Beweis einer relevanten Eigenschaft auf. In der Umarbeitung zu einer Aufgabe mit Forschungselementen wird zunächst gefordert, in zwei Beispielen den (noch nicht als solchen bezeichneten) Exponenten konkret zu bestimmen. Erst dann wird der Begriff eingeführt. Die zu beweisende Eigenschaft wird sodann nicht vorgegeben, sondern soll vom Aufgabenbearbeiter auf Grundlage der Beispiele zunächst als Vermutung gewonnen werden. Erst an dieser Stelle wird ein Beweis gefordert.

Klassische Nachweisaufgabe:

Aufgabe: Exponent einer endlichen Gruppe
Ist G eine endliche Gruppe, so heißt die Zahl

$$\exp(G) := \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall a \in G : a^n = 1\}$$

der *Exponent* von G.
Zeigen Sie, dass $\exp(G)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen aller Elemente von G ist.

Aufgabe mit Forschungselementen
im Bereich *Vermuten und Beweisen*:

Aufgabe: Exponent einer endlichen Gruppe

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Gruppen G jeweils die kleinste natürliche Zahl n, die die Eigenschaft $a^n = 1$ für alle $a \in G$ hat:

 (i) $G = D_3$ (die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks)
 (ii) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(b) Ist G eine endliche Gruppe, so heißt die Zahl n mit der in (a) betrachteten Eigenschaft der *Exponent* der Gruppe G, in Zeichen: $\exp(G)$.
Stellen Sie eine Vermutung auf, wie $\exp(G)$ mit den Ordnungen der Elemente von G zusammenhängt, und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Abbildung 3 Klassische Nachweisaufgabe zum Exponenten einer Gruppe vs. Aufgabe mit Forschungselementen.

Charakteristika von Aufgaben mit Forschungselementen Wir charakterisieren sie durch folgende Eigenschaften, wobei das obige Beispiel als Prototyp dienen kann:

- *In Bezug auf Prozesse:* Eine Aufgabe mit Forschungselementen leitet zu authentischen Vorgehensweisen eines mathematischen Forschungsprozesses an. Im Falle einer Aufgabe, deren Ziel ein Beweis ist, sind dies: Experimentieren, z.B. anhand von Beispielen oder durch Variation des Allgemeinheitsgrads; Vermutungen aufstellen und diese beweisen. Die Aufträge, die in der Aufgabe formuliert werden, sind als Scaffolding zu verstehen: Sie fordern zu Tätigkeiten auf, die ein

Mathematiker in der gegebenen Situation typischerweise ausüben würde, wenn der betreffende Satz noch nicht bekannt wäre. Insofern stellen die expliziten Aufforderungen eine temporäre Hilfe dar, die Novizen zu authentischen forschenden Arbeitsweisen führen sollen.

- *In Bezug auf die Inhalte:* Die Aufgabe mündet in einen rigorosen Beweis, geht also über die Erkundung eines Gegenstands deutlich hinaus. Hinsichtlich des erstellten Produkts stellt die Aufgabe keine originäre Forschung dar. Vielmehr handelt es sich bei den Inhalten um bekannte Sätze aus der Lehrbuchliteratur. Es geht um einen Inhalt, der auch mit einer klassischen Nachweisaufgabe bearbeitet werden könnte.

Die Intention der Aufgaben liegt darin, die Bearbeiter bei einem Beweisproblem einen idealisierten Forschungsprozess mit den Kernphasen *Experimentieren – Vermuten – Beweisen* vollständig durchlaufen zu lassen. Gerade das Aufstellen von Vermutungen wird als sehr gute Gelegenheit für die Entwicklung von Mathematical Sophistication betrachtet (Belnap und Parrot 2013). In klassischen Beweisaufgaben zu einer vorgegebenen Aussage wird sie allerdings nicht verlangt. Hinsichtlich des Experimentierens kann man argumentieren, dass dies in klassischen Beweisaufgaben im Zuge der Beweisfindung ebenfalls erwartet wird. Es zeigt sich allerdings, dass viele Studierende diesen Schritt nicht unternehmen, sondern sogleich versuchen, eine deduktive Argumentationskette aufzubauen – oft in der naiven Hoffnung, dass sich diese ohne vorausgehende Exploration einfach durch passende Kombination von einschlägigen Sätzen zusammensetzen lässt. Aufgaben mit Forschungselementen geben deshalb explizite Aufforderungen zum Experimentieren.

5.2 *Aufgaben zum induktiven Schließen – Cognitive Unity vs. Cognitive Break*

Wir greifen das in Abbildung 3 gezeigte Beispiel nochmals auf und zeigen, dass hierbei Cognitve Unity möglich ist. Im Aufgabenteil (a) kann ein Bearbeiter wie folgt vorgehen: Er probiert zunächst für jedes Gruppenelement a, welche Potenz n mindestens erforderlich ist, um $a^n = 1$ zu erreichen – er bestimmt also die Ordnung des Elements. Im Fall $G = D_3$ findet er durch Inspektion der sechs Gruppenelemente, dass die Ordnungen 1, 2 und 3 vorkommen. Im Fall $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ findet er durch komponentenweise Betrachtung, dass die Ordnungen 1, 2, 3, 4, 6 und 12 vorkommen. Nun folgt die entscheidende Stelle im Denkprozess: Für festes a sind die Zahlen n mit $a^n = 1$ genau die Vielfachen der Ordnung von a. Die in der Aufgabe gesuchte Zahl n, die $a^n = 1$ für *alle* $a \in G$ erfüllt, muss somit ein Vielfaches aller Ordnungen sein. Die kleinste Möglichkeit ist im Fall $G = D_3$ also $n = 6$ und im Fall $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ also $n = 24$. Dass der Bearbeiter im Aufgabenteil (a) bereits erkennt, dass n das kgV der Ordnungen ist, ist nicht zwingend notwendig. Erst Aufgabenteil (b) fordert, n in Abhängigkeit der Ordnungen auszudrücken. Wenn die Beispiele nun *generisch* betrachtet werden, d.h., wenn man sich von den konkreten Zahlenwerten löst und überlegt, wie sich n jeweils aus den Ordnungen ergibt, dann kann die Vermutung $\exp(G) = \mathrm{kgV}\{\mathrm{ord}(a) \mid a \in G\}$ aus den Beispielen generiert werden. Auch das Vielfachenargument, mit dem n in den Beispielen gefunden wurde, kann auf den Beweis der allgemeinen Aussage übertragen werden.

Im vorigen Beispiel ist also Cognitive Unity zwischen den Überlegungen der Vermutungsphase und der Beweisphase möglich. Das Wort „möglich“ ist hier bewusst gewählt, da die Überlegungen in Teilaufgabe (a) auch anders verlaufen können, z.B. durch systematisches Ausprobieren ohne konzeptuelle Überlegung. Generell lässt sich daher von *Cognitive Unity* immer nur als *Möglichkeit* sprechen.

Das folgende Beispiel zeigt, dass eine klassische Nachweisaufgabe in verschiedener Weise zu einer Aufgabe mit Forschungselementen umgearbeitet werden kann, indem die Explorationsphase unterschiedlich gesteuert wird: mit Cognitive Unity, mit Cognitive Break, und ohne bestimmte Richtungsangabe.

Beispiel: Schnitt ebener Kurven mit Geraden Abbildung 4 zeigt verschiedene Versionen einer Aufgabe, in der bewiesen werden soll, dass eine irreduzible affin-algebraische Kurve $C \subset \mathbb{C}^2$ vom Grad d jede Gerade in höchstens d Punkten schneidet. Version 1 stellt eine klassische Nachweisaufgabe dar: Sie gibt die zu zeigende Aussage an und fordert zum Beweis auf. Die anderen drei Versionen geben die Aussage nicht vor, sondern leiten explizit zu Forschungsaktivitäten an, die zunächst dazu führen sollen, die Aussage als Vermutung zu finden.

- In Version 3 (mit Cognitive Break) wird das Experimentieren mit dynamischer Geometriesoftware angeregt. Die Experimente legen die Vermutung nahe, dass höchstens d Schnittpunkte auftreten können. Über die visuelle Beobachtung hinaus können die Bilder das heuristische Argument entstehen lassen, dass sich Kurven von gegebenem Grad nicht beliebig oft „hin und her winden“ können und daher Geraden nur begrenzt oft schneiden können. Obwohl diese intuitive geometrische Vorstellung zutreffend ist, ist nicht ersichtlich, wie diese Vorüberlegung in einem Beweis genutzt werden könnte. Stattdessen geht der übliche Beweis algebraisch vor und arbeitet mit der Gleichung der Kurve: Durch Auflösen der Geradengleichung und Einsetzen in die Gleichung der Kurve entsteht ein Polynom vom Grad $\leq d$ in einer Unbestimmten. Da dies nicht das Nullpolynom sein kann, kann es höchstens d Nullstellen haben. Die Argumente, die in der explorativen Phase gefunden wurden, lassen sich also im Beweis nicht verwenden – es liegt ein Cognitive Break vor.
- In Version 4 (mit Cognitive Unity) wird dagegen das algebraische Arbeiten mit den Gleichungen in der explorativen Phase explizit gefordert. Die am konkreten Beispiel durchgeführten Rechnungen lassen sich zu einem Beweis ausarbeiten, indem das gegebene Polynom zunächst generisch betrachtet wird (d.h. man fragt sich „Kommt es bei der konkreten Rechnung irgendwo auf die konkrete Gestalt des Polynoms an?“) und dann vom konkreten Polynom abstrahiert und ein Argument an einem allgemeinen Polynom geführt wird.
- Version 2 steuert nicht, in welcher Weise exploriert werden soll. Es hängt vom Bearbeiter ab, ob es zu Cognitive Unity oder zu Cognitive Break kommen wird.

Version 1: Klassische Beweisaufgabe

Aufgabe: Schnitt ebener algebraischer Kurven mit Geraden

Sei $C \subset \mathbb{C}^2$ eine Kurve, die durch ein irreduzibles Polynom vom Grad $d \geq 2$ gegeben ist. Zeigen Sie: Die Anzahl der Schnittpunkte von C mit einer Geraden ist höchstens d.

Version 2: Umarbeitung zu einer Aufgabe mit Forschungselementen im Bereich *Vermuten und Beweisen* (Version ohne Steuerung):

Aufgabe: Schnitt ebener algebraischer Kurven mit Geraden

(a) Finden Sie Geraden, die die Kurve

$$\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3\}$$

in 1 bzw. 2 bzw. 3 Punkten schneiden.

(b) Warum können nicht mehr als drei Schnittpunkte vorkommen?

(c) Wenn eine Kurve in $\mathbb{C}^2$ durch ein irreduzibles Polynom von Grad $d \geq 2$ definiert wird, welche Möglichkeiten erwarten Sie für die Anzahl von Schnittpunkten mit Geraden? Formulieren Sie eine Vermutung dazu und beweisen Sie sie.

Version 3: Umarbeitung zu einer Aufgabe mit Forschungselementen im Bereich *Vermuten und Beweisen* (Version mit *Cognitive Break*):

Aufgabe: Schnitt ebener algebraischer Kurven mit Geraden

(a) Zeichnen Sie mit Geogebra die Kurve

$$\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3\}$$

(d.h. ihren reellen Teil) und schneiden Sie sie graphisch mit verschiedenen Geraden. Was ist die maximale Anzahl an Schnittpunkten, die Sie erhalten?

(b) Experimentieren Sie mit weiteren Kurven (z.B. vom Grad 4 und 5).

(c) Wenn eine Kurve in $\mathbb{C}^2$ durch ein irreduzibles Polynom von Grad $d \geq 2$ definiert wird, welche Möglichkeiten erwarten Sie für die Anzahl von Schnittpunkten mit Geraden? Formulieren Sie eine Vermutung dazu und beweisen Sie sie.

Version 4: Umarbeitung zu einer Aufgabe mit Forschungselementen im Bereich *Vermuten und Beweisen* (Version mit *Cognitive Unity*):

Aufgabe: Schnitt ebener algebraischer Kurven mit Geraden

(a) Wir betrachten die Kurve

$$\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3\}$$

und sind an ihrem Schnitt mit Geraden $ax + by + c = 0$ interessiert. Wählen Sie konkrete Beispiele für Geraden und berechnen Sie jeweils die Schnittpunkte mit der Kurve. Finden Sie insbesondere Geraden, die die Kurve in 1 bzw. 2 bzw. 3 Punkten schneiden.

(b) Warum können nicht mehr als drei Schnittpunkte vorkommen?

(c) Wenn eine Kurve in $\mathbb{C}^2$ durch ein irreduzibles Polynom von Grad $d \geq 2$ definiert wird, welche Möglichkeiten erwarten Sie für die Anzahl von Schnittpunkten mit Geraden? Formulieren Sie eine Vermutung dazu und beweisen Sie sie.

Abbildung 4 Umarbeitungen einer Übungsaufgabe – induktives Schließen

> Insofern ist diese Version realer Forschung am nächsten. Erfahrene Forscher sind sich bewusst, dass heuristische Überlegungen sich manchmal für einen Beweis weiterverarbeiten lassen und manchmal auch nicht. Wenn sie etwa feststellen, dass sich geometrische Vorüberlegungen nicht für einen Beweis nutzen lassen, dann würden sie weitere Vorüberlegungen aus anderer Perspektive anstellen.

In realer mathematischer Forschung treten sowohl Situationen mit Cognitive Unity als auch solche mit Cognitive Break auf. Für die Zwecke einer Aufgabe mit Forschungselementen scheint es jedoch ratsam, zunächst Beispiele zu entwerfen, bei denen Cognitive Unity möglich ist. Diese können als Vorbilder für heuristisches Arbeiten dienen, das zum Erfolg führt. Später kann es sinnvoll sein, die Steuerung zurückzunehmen. In einer Besprechung der Aufgabe (etwa in einer Übungsgruppe) ist es dann wichtig, die unterschiedlichen experimentellen Vorgehensweisen aufzuzeigen. Bei Aufgaben mit Cognitive Break erhöht der experimentelle Zugang die Vertrautheit mit dem Phänomen, ohne bereits einen Weg zum Beweis zu eröffnen. Diese Aufgaben sind deshalb in einem weiteren Zielhorizont zu sehen. Dazu gehört zum Beispiel die Einsicht, dass in manchen Fällen erst ein Wechsel der Betrachtungsebene zum Erfolg führt.

5.3 *Aufgaben zum deduktiven Schließen*

Nach den Aufgaben zum induktiven Schließen im vorigen Abschnitt stellen wir nun eine Aufgabe aus der Algebra vor, die deduktives Mutmaßen anregt (Abb. 5). Die klassische Version der Aufgabe fordert zum Beweis der Aussage auf, dass ein Polynom, das vom Nullpolynom verschieden ist, über einem Integritätsring höchstens so viele Nullstellen haben kann, wie sein Grad angibt. In der umgearbeiteten Version wird der Bearbeiter dazu angeleitet, diese Schranke selbst zu finden und gleichzeitig zu beweisen. Die einzelnen Schritte der Aufgabenstellung leiten dazu an, allgemeine heuristische Strategien (Schreiber 2011) im konkreten Fall einzusetzen – in diesem Beispiel insbesondere einen Reduktionsheurismus. Die Arbeitsaufträge sind dabei so formuliert, dass die aufgabenunabhängigen Strategien sichtbar werden („Spezialfall betrachten“, „allgemeinen Fall auf den Spezialfall zurückführen“, „iterierte Anwendung“), um sie auch für spätere Situationen zugreifbar zu machen.

5.4 *Aufgabendesign im Spannungsfeld von Authentizität und gestuften Anforderungen*

Der vorgestellte Ansatz ist nicht als Plädoyer gemeint, klassische Nachweisaufgaben grundsätzlich durch andere Formate abzulösen, da sie zu wenig authentisches Mathematiktreiben beinhalten. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass verschiedene Aufgabentypen ihren je eigenen Ort im Lernprozess haben:

Version 1: Klassische Beweisaufgabe

> **Aufgabe: Nullstellen von Polynomen**
>
> Beweisen Sie: Ist R ein Integritätsring und f ein Polynom aus $R[X]$ vom Grad $d \geq 0$, so hat f höchstens d Nullstellen in R. (Finden Sie einen Beweis, der ohne Polynomdivision auskommt.)

Version 2: Umarbeitung zu einer Aufgabe mit Forschungselementen (deduktives Schließen):

> **Aufgabe: Nullstellen von Polynomen**
>
> Es sei R ein Integritätsring und f ein Polynom aus $R[X]$ vom Grad $d \geq 0$. Finden und beweisen Sie auf dem folgenden Weg eine Schranke für die Anzahl der Nullstellen von f in R:
>
> (a) Angenommen, 0 ist eine Nullstelle des Polynoms $f = a_d X^d + \ldots + a_0$. Werten Sie die Gleichung $f(0) = 0$ aus, um zu zeigen, dass f sich faktorisieren lässt.
> (b) Verallgemeinern Sie das Ergebnis aus (a) auf beliebige Nullstellen $a \in R$, indem Sie überlegen, wie Sie den allgemeinen Fall durch Verschieben auf den in (a) betrachteten Spezialfall zurückführen können.
> (c) Welche Schranke für die Anzahl Nullstellen lässt sich durch iterierte Anwendung des Ergebnisses aus (b) gewinnen?

Abbildung 5 Umarbeitung einer Übungsaufgabe – deduktives Schließen

Von realer Forschungssituation zur Übungsaufgabe In verschiedenen Kontexten kann derselbe mathematische Gegenstand in sehr verschiedener Weise gehandhabt werden. Am Beispiel des Begriffs *Gruppenoperation* soll dies im Folgenden illustriert werden:

(1) In einer Forschungssituation untersucht Mathematiker M eine Menge X von (z.B. geometrischen) Objekten. Er findet eine Gruppe G, die auf X operiert, und diese Gruppenoperation erweist sich als Schlüssel zur Problemlösung. – *M befindet sich in einer offenen Forschungssituation, in der sich eine Idee als Schlüssel zur Lösung erweist.*

(2) Ein Doktorand D untersucht eine Menge Y, die gewisse Gemeinsamkeiten mit X aufweist. In dieser Betreuungssituation gibt M den Rat: „Untersuchen Sie, ob auf Y vielleicht eine Gruppe operiert. Das könnte helfen.“ – *D befindet sich in einer betreuten Forschungssituation. M gibt Vorschläge zur Weiterarbeit als hypothetisches Scaffolding.* (Es ist *hypothetisch* in dem Sinne, dass nicht garantiert ist, dass die Idee zum Erfolg führt. Der Experte gibt hier eine Strategie weiter, die er selbst in dieser Situation versuchsweise anwenden würde.)

(3) M oder D formulieren in einer Übungsaufgabe: „Zeigen Sie: G operiert auf X." – *Die Bearbeiter der Aufgabe befinden sich in einer geschlossenen Übungssituation. Sie rechnen die definierenden Eigenschaften einer Gruppenoperation nach.*

Was in Punkt 1 und 2 ein Forschungsproblem war, ist in Punkt 3 auf eine Nachweisaufgabe reduziert worden, die im Wesentlichen prozedural bearbeitet werden kann. Dies erscheint insofern defizitär, als vom forschenden Suchen nichts mehr übrig ist; dass die Gruppenoperation ein Schlüssel zur Lösung eines Problems sein kann, ist nicht erkennbar. Allerdings gibt es eine zweite Sicht auf diese Problematik: Wer Gruppenoperationen gerade erst kennen lernt, kann durch Aufgaben vom Typ 3 lernen, entsprechende Nachweise zu führen. Dem Doktoranden hilft der Expertenrat auf Stufe 2 nur, wenn er in der Lage ist, ihm zu folgen, d.h. wenn er solche Nachweise führen kann. Mathematiker M wäre in Situation 1 kaum auf die Idee gekommen, Gruppenoperationen in Betracht zu ziehen, wenn er diese nicht irgendwann vorher auf Stufe 3 oder 2 kennen gelernt hätte. Insgesamt liegt eine Voraussetzungskette vor:

$$\text{Stufe } 3 \longrightarrow \text{Stufe } 2 \longrightarrow \text{Stufe } 1$$

Dies zeigt, dass ein Spannungsverhältnis zwischen authentischem Mathematiktreiben auf der einen Seite und realistischen, gestuften Anforderungen auf der anderen Seite vorliegt. Ein Slogan wie *authentische Aufgaben stellen* drückt daher zwar eine naheliegende Idee in wünschenswerter Zielrichtung aus, kann das genannte Spannungsverhältnis aber nicht auflösen.

Hier soll dafür plädiert werden, Nachweisaufgaben und Aufgaben mit Forschungselementen nicht in Konkurrenz, sondern komplementär zu sehen. Ein Problem der Lehramtsausbildung besteht allerdings darin, dass sie oft auf Stufe 3 verbleibt. Es werden also Bausteinfähigkeiten (hier z.B. zum Nachweis der Eigenschaften einer Gruppenoperation) geübt, die für Tätigkeiten in Stufe 2 oder 1 nötig wären – welche im Lehramtsstudium aber oft gar nicht vorkommen.

6 Diskussion und Ausblick

6.1 Einordnung der Aufgaben

Legt man objektiven Erkenntnisgewinn als Maßstab an, dann liegt auf der Hand, dass die im vorliegenden Kapitel vorgestellten Aufgaben mit Forschungselementen nicht zum forschenden Lernen zu rechnen sind. So kann man sich im Beispiel zum Begriff *Exponent* aus Abschnitt 5.2 zwar vorstellen, dass der Begriff in ähnlicher Weise entstanden sein *könnte*, aber der Aufgabensteller wird die historischen Abläufe in den meisten Fällen gar nicht kennen. Es stellt sich daher die Frage, wie die Aufgaben einzuordnen sind. Tabelle 1 versucht eine Gegenüberstellung und Abgrenzung der verschiedenen Ausprägungen. Hiernach unterscheiden sich Aufgaben mit Forschungselementen von anderen Formen des entdeckenden Lernens dadurch, dass die sachbezogene Aktivierung der Lernenden nicht das primäre Ziel ist, sondern das Kennenlernen und Einüben der Schritte eines Forschungsprozesses, der möglichst vollständig zu durchlaufen ist. Vom forschungsnahen Lehren und Lernen unterscheidet es sich dadurch, dass der durchlaufene Forschungsprozess in aller Regel historisch nicht so abgelaufen ist, sondern simuliert wird und meist drastisch verkürzt ist. Tabelle 1 zeigt andererseits auch, dass Aufgaben mit Forschungselementen als Zwischenstufe zwischen Nachweisaufgaben und forschungsnahem Lehren und Lernen (insbesondere in der Ausprägung von FBL) aufgefasst werden können. Es wird in den Aufgaben zwar noch kein Forschungsprozess nachvollzogen, der real so stattgefunden haben muss, aber die Prozessschritte entsprechen (idealisiert) authentischen Forschungsprozessen.

Entdeckendes Lernen	Aufgaben mit Forschungselementen	Forschungsnahes Lehren und Lernen		
		Forschungsbasiertes Lehren und Lernen (FBL)	Forschungsorientiertes Lehren und Lernen (FOL)	Forschendes Lernen (FL)
Studierende erkunden einen Gegenstand/eine Problemstellung eigenständig (ggf. unter Anleitung) (im Gegensatz zu darbietendem Unterricht).	Studierende durchlaufen authentische Schritte eines Forschungsprozesses, aber nicht an einem authentischen Forschungsgegenstand.	Studierende werden mit Grundproblemen der Forschung konfrontiert. Sie verfolgen nach, wie aus einer Frage Forschung wurde.	Studierende werden zur aktuellen Forschung hingeführt. Die wissenschaftlichen Arbeitsweisen werden mit zum Thema; eventuell Mitarbeit in einem bereits laufenden Projekt.	Die Lernenden forschen selbst und durchlaufen idealtypisch den gesamten Forschungszyklus; auf Gewinnung von für Dritte interessanten Erkenntnissen gerichtet.
Subjektiver Erkenntnisgewinn			*Objektiver Erkenntnisgewinn*	

Tabelle 1 Verortung der Aufgaben mit Forschungselementen. Sie unterscheiden sich von den drei Typen forschungsnahen Lehrens und Lernens darin, dass kein realer Forschungsprozess stattfindet oder ein Forschungsprozess nachvollzogen wird, der real so stattgefunden hat. Von anderen Formen des entdeckenden Lernens unterscheiden sie sich darin, dass das Hauptaugenmerk nicht auf dem eigenständigen Erarbeiten auf einem stufengemäß angepassten Weg liegt, sondern auf möglichst authentischem Forschungsverhalten.

6.2 Fazit und Perspektiven

Im vorliegenden Kapitel wurden Möglichkeiten entwickelt, klassische Übungsaufgaben so umzuarbeiten, dass sie zu professionstypischen Arbeitsweisen beim induktiven und deduktiven Schließen anleiten. Das Explizieren dieser Vorgehensweisen, die – jedenfalls im Falle des induktiven Schließens – oft als Teil des Lösungsprozesses klassischer Aufgaben ohnehin implizit erwartet werden, erfolgt dabei mit der Absicht, enkulturationsfördernd auf die Studierenden zu wirken. Es wurde gezeigt, wie Aufgaben in verschiedener Steuerung angelegt werden können: mit Cognitive Unity, mit Cognitive Break oder ganz unter Verzicht auf Steuerung. Die Aufgaben sind aus klassischen Übungsaufgaben entstanden und können als Ersatz für sie verwendet werden. Eine solche Weiterentwicklung der universitären Aufgabenkultur scheint dem Autor wichtig, da die vorlesungsbegleitend gestellten Hausübungen von zentraler Bedeutung für die Lernprozesse von Mathematikstudierenden sind, gleichzeitig aber das Potenzial von Aufgaben dabei bislang noch nicht voll ausgeschöpft wird. Falls Vorbehalte von Dozenten gegen Änderungen in der Aufgabenkultur hierbei eine Rolle spielen sollten, dann hat der vorliegende Ansatz den Vorteil, besonders niederschwellig zu sein. Da die Umarbeitung eine auf die einzelnen Aufgaben lokal begrenzte Maßnahme ist, können die Aufgaben klassische Aufgaben ersetzen, ohne weitergehende inhaltliche oder organisatorische Änderungen nach sich zu ziehen. Der Ansatz hat ferner den Vorzug, dass er innerhalb des jeweils vorhandenen Studienvolumens realisierbar ist – er erfordert keine neuen oder vergrößerten Lehrveranstaltungen.

Noch offen ist, in welchem Ausmaß traditionelle Übungsaufgaben in der hier gezeigten Art umgestaltet werden können. Es ist zu erwarten, dass die Möglichkeiten der Umarbeitung auch von der Funktion abhängen, die die jeweilige Aufgabe zu erfüllen hat (vgl. die FABEL-Klassifikation von Bikner-Ahsbahs und Schäfer 2013). Die Untersuchung von Pandikow (2018) deutet auf Grenzen und Hindernisse hin und zeigt, dass eine solche Umarbeitung nicht bei beliebig vorgegebenen Aufgaben in naheliegender Weise realisierbar ist. Eine noch weitergehende Frage betrifft das Zusammenspiel von induktiven und deduktiven Schlussweisen, die in realen Forschungsprozessen vorkommen. Hierbei sind oftmals Entdeckungs- und Rechtfertigungskontext in vielfältiger Weise ineinander eingebettet. Lassen sich solche realistischen Szenarien in Aufgaben für Studierende sichtbar machen und üben? Wie komplex müssen Aufgaben sein, um dies erlebbar zu machen?

Literatur

Bauer, Th. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In: Ch. Ableitinger, J. Kramer, S. Prediger (Hrsg.), Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung (pp. 39-56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Belnap, J., Parrott, A. (2013). Understanding Mathematical Conjecturing. the Electronic Proceedings for the Sixteenth Special Interest Group of the MAA on Research on Undergraduate Mathematics Education. Denver, CO: Northern Colorado University.

Berendonk, S. (2014). Erkundungen zum Eulerschen Polyedersatz: Genetisch, explorativ, anschaulich. Wiesbaden: Springer Fachmedien

Berendonk, S. (2015). Wider den mathematikdidaktischen Induktivismus. Der Mathematikunterricht 61(6).

Beutelspacher, A., Danckwerts, R. ,Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011). Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Bikner-Ahsbahs, A., Schäfer, I. (2013). Ein Aufgabenkonzept für die Anfängervorlesung im Lehramt Mathematik. In: C. Ableitinger, J. Kramer und S. Prediger (Hrsg.), Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung (S. 57–76). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Bills, L., Mason, J., Watson, A., Zaslavsky, O., Goldenberg, P., Rowland, T., Zazkis, R. (2006). Exemplification: The use of examples in teaching and learning mathematics. In: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1 (p. 125–154).

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, S. 7–8.

Boero, P., Garuti, R., Mariotti, M.A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. In: Proceedings of PME-XX, Valencia, vol. 2, 121–128.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. Pythagoras, 24, 17-24.

Fulton, W., Harris, J. (1991). Representation theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 129. New York: Springer.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998). Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof. In: Proceedings of PME-XXII, Stellenbosch, vol.2, 345-352.

Halverscheid, S., Müller, N. C. (2013). Experimentelle Aufgaben als grundvorstellungsorientierte Lernumgebungen für die Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher. In: C. Ableitinger, J. Kramer und S. Prediger (Hrsg.), Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung (S. 117–134). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Halverscheid, S., Pustelnik, K., Schneider, S. (2014). Ein diagnostischer Ansatz zur Ermittlung von Wissenslücken zu Beginn mathematischer Vorkurse. In: I. Bausch et al. (Hrsg.), Mathematische Vor- und Brückenkurse, Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik (S. 295-308). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Hefendehl-Hebeker, L. (2015). Die fachlich-epistemologische Perspektive auf Mathematik als zentraler Bestandteil der Lehramtsausbildung. In: Roth, J., Bauer, T., Koch, H., Prediger, S. (Hrsg.), Übergänge konstruktiv gestalten (pp. 179-183). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Heuser, H. (1986). Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Stuttgart: Teubner.

Hoffkamp, A., Paravicini, W., Schnieder, J. (2016) Denk- und Arbeitsstrategien für das Lernen von Mathematik am Übergang Schule–Hochschule. In: Hoppenbrock, A., et al. (Hrsg.), Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase, Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik (S. 295–309). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Huber, L. (2009). Warum Forschendes Lernen nötig und möglich ist. Forschendes Lernen im Studium. Aktuelle Konzepte und Erfahrungen. Bielefeld: UVW, 9-35.

Huber, L. (2014). Forschungsbasiertes, Forschungsorientiertes, Forschendes Lernen: Alles dasselbe? Ein Plädoyer für eine Verständigung über Begriffe und Unterscheidungen im Feld forschungsnahen Lehrens und Lernens. Das Hochschulwesen, 1(2), 32-39.

Kühl, S. (2009). Forschendes Lernen und Wissenschaftsbetrieb. Zur Erfahrung mit einem soziologischen Lehrforschungsprojekt. In: Forschendes Lernen im Studium. Aktuelle Konzepte und Erfahrungen (Vol. 10).

Lakatos, I. (1979). Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen. Braunschweig: Vieweg.

Mischau, A., Blunck, A. (2006). Mathematikstudierende, ihr Studium und ihr Fach: Einfluss von Studiengang und Geschlecht. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 14(1), 46-52.

Pandikow, H. (2018). Design von Aufgaben zur Algebra, die Cognitive Unity ermöglichen. Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien im Fach Mathematik, Philipps-Universität Marburg.

Pedemonte, B. (2002). Relation between argumentation and proof in mathematics: cognitive unity or break. In: Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (Vol. 2, pp. 70-80).

Pólya, G. (1969). Mathematik und plausibles Schliessen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel: Birkhäuser.

Resnick, L. (1989). Treating mathematics as an ill-structured discipline. In: R. Charles, E. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 32-60). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schreiber, A. (2011). Begriffsbestimmungen: Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung. Berlin: Logos Verlag.

Seaman, C., Szydlik, J. (2007). Mathematical sophistication among preservice elementary teachers. Journal of Mathematics Teacher Education 10, 167-182

Szydlik, J., Kuennen, E., Seaman, C. (2009). Development of an instrument to measure mathematical sophistication. In: Proceedings for the Twelfth Conference of the MAA's Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education.

Toeplitz, O. (1932). Das Problem der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus". Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule aus den mathematischen Seminaren 1, 1–15.

Winsløw, C. (2017). Oral examinations in first year analysis: between tradition and innovation. In: Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H.-G. (Eds.). Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings. Kassel, Germany: Universitätsbibliothek Kassel.